



TITLE:

球面内の非等質極小等径超曲面の 第一固有値(リーマン多様体とリー 群)

AUTHOR(S):

武藤, 秀夫

CITATION:

武藤, 秀夫. 球面内の非等質極小等径超曲面の第一固有値(リーマン多様体とリー群). 数理解析研究所講究録 1985, 576: 65-74

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99250>

RIGHT:

球面内の非等質極小等径超曲面の第一固有値

東京工業大学

武藤 秀夫

Muto Hideo

1. 序

$M^{n-1} \subset S^n$ を、埋め込まれた閉じた極小超曲面とする。

高橋の定理 [13] に関連して、次の問題を考える。

問題 (萩上 [10]) M の Laplacian の第一固有値 λ_1 が、 $\lambda_1 = \dim M$ となる M は、どのようなものか？

ここでは、極小等径超曲面 M^{n-1} 、即ち、 M 上の単位法ベクトル場に関して、主曲率が定数となるものについて考える。 q を異なる主曲率の数、 $\{\cot \theta_\alpha\}_{\alpha=0}^{q-1}$ ($0 < \theta_0 < \dots < \theta_{q-1} < \pi$) を主曲率、 m_α を重複度とすると、Münzner [5], [6] により、 $q \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $\theta_\alpha = \theta_0 + \frac{\alpha}{q}\pi$, $m_{\alpha+2} = m_\alpha$ (indices mod q) が示されている。Cartan により、 $q \leq 3$ ならば、等質であることが示され、又、尾関-竹内 [11], Ferus-Karcher-Münzner [2] により、 $q=4$ のとき、非等質なものも無限個存在することが示された。

等質 等径な極小超曲面については、Hsiang-Lawson [3], 高木-高橋 [12], 尾関-竹内 [11] による分類から、武藤-大仁田-浦川 [8], 小谷 [4] は、 $q \neq 4$ の場合について、

$\lambda_1 = \dim M$ を示した。

そこで、ここでは、 $g=4$ の時の主に、非等値な場合について考える。

compact 多様体 N の Laplacian の固有値を、 $\{0 < \lambda_1(N) \leq \lambda_2(N) \leq \dots \leq \lambda_k(N) \leq \dots\}$ とすると、次を得る。

定理 A. M^{n-1} を $S^n(1)$ 内の閉じた等径超曲面で、

$\min\{m_0, m_1\} \geq 2$ をみたすものとする。この時、

$$\lambda_k(M^{n-1}) \geq G \lambda_k(S^n(1)), \quad \forall k \geq 1.$$

ここで、 $l = g/2$,

$$G = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m_0} x \cos^{m_1} x dx}{\sin^2 \theta_0 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^{m_0} x}{\sin^2 \frac{x}{l}} \cos^{m_1} x dx + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2l} - \theta_0 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta_0} \frac{\sin^{m_1} x}{\sin^2 \frac{x}{l}} \cos^{m_0} x dx}$$

定理 B. M^{n-1} を $S^n(1)$ 内の閉じた超小等径超曲面で、次のどれかをみたすとする。(ただし、 $k \geq 1$)

$$\cdot g = 3 : (m_0, m_1) = (4, 4), (8, 8)$$

$$\cdot g = 4 : (m_0, m_1) = (3, 4)^*, (3, 8), \dots, (3, 4k), \dots$$

$$(4, 5)^*,$$

$$(4, 3)^*, (4, 7)^*, \dots, (4, 4k-1)^*, \dots$$

$$(6, 9)^*$$

$$(7, 8), (7, 16), \dots, (7, 8k), \dots$$

この時、 M は、第一固有関数で埋め込まれている。即ち、

$$\lambda_1(M^{n-1}) = n-1.$$

注意 1. $g=4$ の上の場合、それぞれに対して、非等値なものが存在する。(Ferus-Karcher-Münzner [2]).

注意 2. $(3, 4k), (7, 8k)$ は、尾関-竹内 [11] による例に対応する。* は、等値、非等値、共に存在。

2. 球面内の等径超曲面

ここでは、Münzner [5], [6] の結果について述べる。

$f: M^{n-1} \longrightarrow S^n(1) (\subset \mathbb{R}^{n+1})$ を球面内の等径超曲面とする。

$f_\theta: M \longrightarrow S^n(1) \quad (-\pi < \theta < \pi)$ を $\forall p \in M$ に対して、

$$f_\theta(p) = \exp_{f(p)} \theta \nu$$

$$\parallel \sin \theta \cdot \nu + \cos \theta \cdot f(p)$$

と定義する。ここで、 $x \parallel y$ は、 x と y が \mathbb{R}^{n+1} のベクトルとして平行なことを意味する。

定理 1 (Münzner [5], [6]) M^{n-1} を $S^n(1)$ 内の閉じた等径超曲面とする。この時、次の (1)-(5) が成立する。

$$(1) \quad \theta_\alpha = \theta_0 + \frac{\alpha\pi}{g} \quad (\alpha=0, \dots, g-1)$$

$$(2) \quad m_\alpha = m_{\alpha+2} \quad (\text{indices mod } 2)$$

$$(3) \quad g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad 2g = \dim_{\mathbb{R}} H^*(M; \mathbb{R})$$

- (4) $M_+ = f_{\theta_0}(M)$ (resp. $M_- = f_{-\pi+\theta_0-1}(M) = f_{-\frac{\pi}{q}+\theta_0}(M)$) とおく。この時、 M_+ (resp. M_-) は、 $(n-m_0-1)$ -dim. (resp. $(n-m_1-1)$ -dim.) の smooth embedded closed submanifold になる。又、 $\tilde{M}_+ = \bigcup_{\theta \in [0, \theta_0]} f_{\theta}(M)$ (resp. $\tilde{M}_- = \bigcup_{\theta \in [\theta_0 - \frac{\pi}{q}, 0]} f_{\theta}(M)$) とおくと、 \tilde{M}_+ (resp. \tilde{M}_-) は、 M_+ (resp. M_-) 上の normal disk bundle になり、 $\tilde{M}_+ \cup \tilde{M}_- = S^n(1)$ 。
- (5) $f_{\theta}(M)$ ($\theta \in (-\frac{\pi}{q} + \theta_0, \theta_0)$) は、 M に diffeo. な等径超曲面である。

後述のために、2つの式を用意しておく。

$E^{\alpha} = \{ \text{ある基本形式の固有値 } \cot \theta_{\alpha} \text{ の固有 vector} \}$ とすると、

$$(2.1) \quad f_{\theta_0*} X = \frac{\sin(\theta_0 - \theta)}{\sin \theta_{\alpha}} \tilde{X}, \quad \forall X \in E^{\alpha}$$

R を M^{n-1} の μ に関する mean curvature とすると、

$$(2.2) \quad (n-1)R = \begin{cases} m_0 q \cot q\theta_0 & (m_0 = m_1) \\ \frac{m_0 q}{2} \cot \frac{q\theta_0}{2} - \frac{m_1 q}{2} \tan \frac{q\theta_0}{2} & (m_0 \neq m_1) \end{cases}$$

3. Volume elements and eigenvalues

$M_{\theta} = f_{\theta}(M)$, ($\theta \in (-\frac{\pi}{q} + \theta_0, \theta_0)$) とおく。 $S^n(1)$ から induce される M_{θ} 上の Riemannian metric を g_{θ} , 体積要素を dM_{θ} と記す。

す。

Lemma 1. M^{n-1} を S^n 内の閉じた等径超曲面で $q \geq 2$ をみたすとする。 $l = q/2$ とおくと、 $\forall \theta \in (-\frac{\pi}{q} + \theta_0, \theta_0)$ に対して、

$$f_\theta^* dM_\theta = F(\theta) dM_0$$

ここで、

$$F(\theta) = \frac{\sin^{m_0} l(\theta_0 - \theta) \cos^{m_1} l(\theta_0 - \theta)}{\sin^{m_0} l \theta_0 \cos^{m_1} l \theta_0}$$

証明は、(2.1) を用いるだけである。

Remark 1. M 上の領域 D に対して、 f_θ によって作られる、 S^n 上の領域を \tilde{D} とすると、 $\text{vol}(D)/\text{vol}(M) = \text{vol}(\tilde{D})/\text{vol}(S^n)$ なので、 M 上の Cheeger の等周的定数を、 S^n 上の等周的定数で下から評価できる。

Remark 2. 又、 Lemma 1. を用いると、 M が tight であることが、 Th. 1 (3) から導びける。

定理 A の証明 $\forall \varepsilon > 0$: 十分小に対して、

$$M(\varepsilon) = \bigcup_{\theta \in [-\frac{\pi}{q} + \theta_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon]} f_\theta(M)$$

とおくと、 Th. 1. より、 $M(\varepsilon)$ は、 S^n 内から、 M_+ , M_- の ε -近傍を除いて得られる、 S^n 内の領域になる。したがって、

$M(\varepsilon)$ 上の、 Dirichlet 条件下での Laplacian の固有値を $\{0 < \lambda_1^D(M(\varepsilon)) < \lambda_2^D(M(\varepsilon)) \leq \dots \leq \lambda_k^D(M(\varepsilon)) \leq \dots\}$ とすると、 min-max 原理が

ら. $\lambda_{k+1}^D(M(\varepsilon)) \geq \lambda_k(S^n(1))$ ($k=0, 1, \dots$). Lemma 1 より.

$M(\varepsilon)$ の vol. element $dM(\varepsilon)$ は.

$$dM(\varepsilon) = \frac{\sin^{m_0} l(\theta_0 - \theta) \cos^{m_1} l(\theta_0 - \theta)}{\sin^{m_0} l\theta_0 \cos^{m_1} l\theta_0} d\theta dM$$

f_k を $\lambda_k(M)$ に対応する eigenfct. on M とし. $L_k = \text{span}\{f_0, \dots, f_k\}$ とする。

$\bar{\psi}$: a smooth function on $[0, \infty)$, ≥ 0 , non-decreasing

$$\bar{\psi} \equiv 1 \text{ on } [2, \infty), \bar{\psi} \equiv 0 \text{ on } [0, 1]$$

とする。十分小なる $\eta > 0$ に対して.

$\bar{\psi}_\eta$: a smooth function on $[\eta, \frac{\pi}{2} - \eta]$ で次をみたすとする.

$$(1) \bar{\psi}_\eta(\eta) = \bar{\psi}_\eta(\frac{\pi}{2} - \eta) \quad (2) \quad x = \frac{\pi}{4} \text{ で対称}$$

$$(3) \bar{\psi}_\eta(x) = \bar{\psi}(\frac{x}{\eta}) \text{ on } [\eta, \frac{\pi}{4}]$$

この時. $\forall \varphi \in L_k$ に対して.

$$\Phi_\varepsilon(x, \theta) = \bar{\psi}_{l\varepsilon}(l(\theta_0 - \theta)) \varphi(x), \quad \forall x \in M, \quad \forall \theta \in (-\frac{\pi}{4} + \theta_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon)$$

と定義すると. Th 1. より. $M(\varepsilon)$ 上の Dirichlet 条件をみたす fct.

になる。したがって. (2.1) から.

$$\begin{aligned} & \frac{\|d\Phi_\varepsilon\|_2^2}{\|\Phi_\varepsilon\|_2^2} \\ & \leq \eta^2 \frac{\int_{l\varepsilon}^{\pi/2 - l\varepsilon} \bar{\psi}'_{l\varepsilon}(x)^2 \sin^{m_0} x \cos^{m_1} x dx}{\int_{l\varepsilon}^{\pi/2 - l\varepsilon} \bar{\psi}_{l\varepsilon}(x)^2 \sin^{m_0} x \cos^{m_1} x dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\int_{l\varepsilon}^{\pi/2-l\varepsilon} \psi_{l\varepsilon}^2(x) \sin^{m_0} x \cos^{m_1} x dx} \times \frac{\|d\varphi\|_2^2}{\|\varphi\|_2^2} \\
& \times \left\{ \sin^2 \theta_0 \int_{l\varepsilon}^{\theta_0} \psi_{l\varepsilon}^2(x) \frac{\sin^{m_0} x}{\sin^2 \frac{x}{l}} \cos^{m_1} x dx \right. \\
& \left. + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2l} - \theta_0 \right) \int_{\theta_0}^{\pi/2-l\varepsilon} \psi_{l\varepsilon}^2(x) \sin^{m_0} x \frac{\sin^{m_1} x}{\sin^2 \frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx \right\}.
\end{aligned}$$

ここで、 $\min(m_0, m_1) \geq 2$ より、(右辺の分母) $\rightarrow 0$ (as $\varepsilon \rightarrow 0$).

よって、min-max 原理より、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{k+1}(M(\varepsilon)) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{上式の右辺})$$

//

4. 定理 B

定理 B の証明の概略

定理 B は、定理 A を用いて示す。(2.2) により、 $\theta_0 = \cot^{-1} \sqrt{\frac{m_1}{m_0}}$ となる M が、minimal であるから、これを G に代入することにより、 $\lambda_{n+2}(M) > n-1 (= \dim M)$ を示す。 $S^{n-1}(1)$ 以外の等径超曲面は、full に埋め込まれるから、 M^{n-1} 上の \mathbb{R}^{n+1} での coord. functions は、一次独立である。ここで、高橋の定理より、これら $(n+1)$ 個の M 上の関数は、Laplacian の固有値 $n-1$ の固有関数となるから、 $\lambda_{n+2} > n-1$ が示されることにより、 $\lambda_1(M) = \dots = \lambda_{n+1}(M) = n-1$ となる。

さて, (2.2) と Th.A を用いて, $\lambda_{n+2} > n-1$ を示す。

$\theta_0 = \cot^{-1} \sqrt{\frac{m_1}{m_0}}$ とする。たとえば, $(m_0, m_1) = (4, m)$ に対して考えるとき, まず, $m \geq 34$ に対して, $G > \frac{1}{2}$ を示す。ここで, $\lambda_{n+2}(S^{n,11}) = 2(n+1)$ ならば, $\lambda_{n+2} > n-1$ は Th.A から示される。又, 同じく, $m \leq 33$ に対しては, G の値を十分小さな error term のもとで, 計算機により求めることができ, これにより,

$G \times \lambda_{n+2}(S^{n,11}) > n-1$ を示す。ここでのプログラムは, FORTRAN による double exponential formula を用いた subroutine を用いた。(see Mori [7]).

References

- [1] E. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques, Math. Z., 45 (1939), 335-367.
- [2] D. Ferus, H. Karcher, and H.F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, Math. Z., 177 (1981), 479-502.

- [3] W.Y. Hsiang and H.B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Diff. Geom.*, 5 (1971), 1-36.
- [4] M. Kotani, The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere S^{n+1} , preprint.
- [5] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, *Math. Ann.*, 256 (1981), 57-71.
- [6] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, II, *Math. Ann.*, 256 (1981), 215-232.
- [7] M. Mori, "曲線と曲面", 教育出版 (1984).
- [8] H. Muto, Y. Ohnita, and H. Urakawa, Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit sphere and the first eigenvalue of the Laplacian, *Tôhoku Math. J.*, 36 (1984), 253-267.
- [9] H. Muto, The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere, preprint.
- [10] K. Ogine, Open Problems, *Geometry of the Laplace Operator*, ed. T. Ochiai, 1980/81.
- [11] H. Ozeki and M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I, *Tôhoku Math. J.*, 27 (1975), 515-559.
- [12] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere, *Differential Geometry*, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 467-481.

- [13] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 380-385.